29/10 (11)

Άμεσες Μέθοδοι για την Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Μέθοδος Απαλοιφής Gauss - LU παραγοντοποίηση

Θεώρημα

Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με αντιστρέψιμους όλους τους κύριους υποπίνακες $A_{p\times p}\in\mathbb{R}^{p\times p}$ της άνω αριστερής γωνίας. Τότε, υπάρχει κάτω τριγωνικός πίνακας L με $\ell_{ii}=1$ κ άνω τριγωνικός πίνακας U: $A=LU$

Απόδειξη

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix},\quad \beta^{(1)}=\begin{bmatrix} \beta_1^{(1)} \\ \vdots \\ \beta_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{με } m_{ji}=\frac{a_{ji}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad \text{κ} \begin{cases} \beta_j^{(2)}=\beta_j^{(2)}-m_{ji}\beta_1^{(1)} \\ a_{ji}^{(2)}=a_{ji}^{(2)}-m_{j1}a_{1i}^{(1)} \end{cases}$$

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix},\quad \beta^{(2)}=\begin{bmatrix} \beta_1^{(1)} \\ \beta_2^{(2)} \\ \vdots \\ \beta_n^{(2)} \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Μετά από n απαλοιφές} \Rightarrow$$

$$A^{(n)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix},\quad \beta^{(n)}=\begin{bmatrix} \beta_1^{(1)} \\ \beta_2^{(2)} \\ \vdots \\ \beta_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε πίνακες M_j : $A^{(j+1)}=M_jA^{(j)}$ $\forall j=1,\dots,n$ άρα

$$M_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ & & & 0 \\ -m_{n1} & 0 & 0\dots 0 & 1 \end{bmatrix},\quad M_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & -m_{n2} & 0\dots 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots$$

$$A^{(2)}=M_1A^{(1)},\quad A^{(3)}=M_2A^{(2)}=M_2M_1A^{(1)},\ \dots,\ A^{(n)}=M_{n-1}\cdots M_1A \Leftrightarrow$$

$$U=A_n=MA,\quad M=M_{n-1}\cdots M_1$$

Έτσι, M: κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο

Γιατί πρέπει οι υποπίνακες να είναι αντιστρέψιμοι

$a_{11}^{(1)}\neq 0$, Θδο $a_{ii}^{(i)}\neq 0$ και έστω $a_{11}^{(1)}\cdots a_{i-1,i-1}^{(i-1)}\neq 0$

Ο υποπίνακας $A_{p\times p}^{(p)}$ προκύπτει από διαδοχικές αφαιρέσεις στις γραμμές των πολλαπλασίων άλλης γραμμής επομένως $\det(A_{p\times p}^{(p)})=a_{11}^{(1)}\cdots a_{pp}^{(p)}=\det(A_{pp})$

Πρέπει, $\alpha_{11}^{(1)} \cdots \alpha_{i-1\,i-1}^{(i-1)} \neq 0 \Rightarrow \det(A_{ii}) \neq 0$

$U = MA \Leftrightarrow M^{-1}U = A \Leftrightarrow LU = A$

Ο $L = M^{-1}$ είναι κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο

$L = M^{-1} = (M_{n-1} \cdots M_1)^{-1} = M_1^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{11} & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ m_{n1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{n2} & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$M_1^{-1}M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L = M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Αλγόριθμος Απαλοιφής Gauss</u>

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}$ με $\det(A_{p\times p}) \neq 0$ ($A_{p\times p} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ υποπίνακας του A της άνω αριστ. γωνίας), $\beta \in \mathbb{R}^n$

Για $i = 1(1)n-1$

  Για $j = i+1\,(1)\,n$

    $m_{ji} = \alpha_{ji}^{(i)} / \alpha_{ii}^{(i)}$

    Για $l = i+1\,(1)\,n$

      $\alpha_{jl}^{(i+1)} = \alpha_{jl}^{(i)} - m_{ji}\alpha_{il}^{(i)}$

    Τέλος 'για'

    $\beta_j^{(i+1)} = \beta_j^{(i)} - m_{ji}\beta_i^{(i)}$

  Τέλος 'για'

Τέλος 'για'.

Αλγόριθμος της προς τα πίσω αντικατάστασης

$$a_{kk}^{(k)} x_k + a_{k,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \dots + a_{kn}^{(k)} x_n = \beta_k^{(k)} \Leftrightarrow$$
$$x_k = \left(\beta_k^{(k)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}^{(k)} x_i \;/\; a_{kk}^{(k)}\right)$$

Αλγοριθμικά

Για $k = n(-1)1$

$S_k = B_k^{(k)}$

Για $i = k+1(1)n$

$S_k = S_k - a_{ki}^{(k)} \cdot x_i$

Τέλος 'για'

$x_k = S_k / a_{kk}^{(k)}$

Τέλος 'για

Κόστος πράξεων

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
$$= O\left(\frac{n^3}{3}\right)$$

$$Ax = B \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = B \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = B \\ Ux = y \end{cases}$$

$$Ax = B,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ x \in \mathbb{R}^{n \times k},\ B \in \mathbb{R}^{n \times k} \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{Y} = B \Leftrightarrow \begin{cases} LY = B \\ Ux = Y \end{cases}$$

Εύρεση αντιστρόφων

$$Ax = I \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{Y} = I \Leftrightarrow \begin{cases} LY = I \\ Ux = Y \end{cases}$$

Άσκηση

Να λυθεί το γρ. σύστημα $Ax=B$, $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, με απαλ. Gauss κ LU παραγοντοποίηση. Να βρεθεί A^{-1} χρησιμοποιώντας την LU παραγοντοποίηση.

Λύση

$$\begin{array}{c} m_{21}=-\frac{1}{2} \\ m_{31}=0 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ m_{32}=-\frac{2}{3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \underline{\frac{3}{2}} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} Ly=B \\ κ\ Ux=y \end{array}$$

$$y^T=[2 \quad 2 \quad \tfrac{4}{3}] \qquad X^T=[2 \quad 2 \quad 1]$$

Για την εύρεση του A^{-1}:

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} LY=I \\ κ\ UX=Y \end{array}$$

$$Y^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1. \end{bmatrix} \qquad A^{-1}=X=X^T=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Κατάσταση Συστήματος

Έστω $Ax=\beta$ το γρ. σύστημα. Αντί αυτού λύνεται το $A^{*}x^{*}=\beta^{*}$

$\iff (A+dA)(x+dx)=(\beta+d\beta) \iff (A+dA)dx=-dA\cdot x+d\beta$

Υποθέτουμε ότι για κάποια νόρμα ισχύει: $\|A^{-1}\|\cdot\|dA\|<1$

$(I+A^{-1}dA)dx=-A^{-1}dA\cdot x+A^{-1}d\beta$, $\|A^{-1}dA\|\le\|A^{-1}\|\,\|dA\|<1 \Rightarrow$ ισχύει το θεώρ. Neumann

Άρα ο $I-A^{-1}dA$ είναι αντιστρέψιμος

$dx=(I+A^{-1}dA)^{-1}(-A^{-1}dA\,x+A^{-1}d\beta)$

$$\|dx\|\le\|(I+A^{-1}dA)^{-1}\|\cdot\left(\|A^{-1}dA\cdot x\|+\|A^{-1}d\beta\|\right)\le\frac{\|A^{-1}\|\|dA\|\,\|x\|+\|A^{-1}\|\cdot\|d\beta\|}{1-\|A^{-1}dA\|}$$

$$\iff \frac{\|dx\|}{\|x\|}\le\frac{K(A)}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|dA\|}\left(\frac{\|dA\|}{\|A\|}+\frac{\|d\beta\|}{\|A\|\cdot\|x\|}\right)$$ Επειδή $\|\beta\|=\|Ax\|\le\|A\| \iff$

$$\frac{\|dx\|}{\|x\|}\le\frac{K(A)}{1-K(A)\frac{\|dA\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|dA\|}{\|A\|}+\frac{\|d\beta\|}{\|\beta\|}\right)$$

dx: η διατάραξη του x ή αλλιώς το σφάλμα